Área de Publicação:

A MAGIA DAS SÉRIES CONDICIONALMENTE CONVERGENTES

ANDRADE, Caio A. G. de M.[1]**;** FILHO, Daniel C. de M.[2];

1 UFCG/CCT/UAMAT/Bolsista PET-Matemática UFCG/FNDE – e-mail: caioagma@gmail.com

2 UFCG/CCT/UAMAT/Professor UAMAT, Tutor PET-Matemática UFCG/FNDE – email: demoraisfilho@gmail.com

RESUMO

Aprendemos no Ensino Básico que a soma de uma quantidade finita de números reais é comutativa. Existe um ditado popular que diz: "A ordem dos fatores não altera o produto". Mostraremos que esse resultado, em geral, não vale para "somas infinitas", ou seja, séries.

Mostraremos um teorema atribuído a Riemann, que prova que séries que convergem condicionalmente possuem a propriedade de convergirem para qualquer valor $c \in \mathbb{R}$, após uma permutação conveniente da ordem na qual seus termos são somados. A demonstração de tal resultado sugere um programa de computador, que foi construído em SCILAB. Tal trabalho é oriundo de um curso de Análise Real e de uma pesquisa bibliográfica.

Acreditamos que a compreensão desse resultado e a exibição do programa em SCILAB ajudam a entender a estranheza do infinito e das séries, tópicos de extrema importância no estudo da análise.

Palavras-Chave: Séries, Condicionalmente, Convergente, Riemann.

1. INTRODUÇÃO

Aprendemos no ensino básico que a soma de uma quantidade finita de de números reais é comutativa, isto é, podemos somar os termos em qualquer ordem, sem alterar o resultado. Será que tal propriedade ainda vale para somas infinitas?

Veremos que a resposta é negativa. Sejam $\varphi: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ uma bijeção e $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ uma série. Fazendo:

$$a'_n = a_{\varphi(n)},$$

Chamamos a série $\sum_{n=1}^{\infty} a'_n$ de uma **reordenação** de $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$**.**

Considere a série harmônica

$$\sum \frac{(-1)^{n+1}}{n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots, \quad (\boldsymbol{I})$$

que é convergente pelo Critério de Leibniz, que consta em [1], p.146 , mas não converge absolutamente, vide [1], p. 135. Escreva $S = \sum \frac{(-1)^{n+1}}{n} > 0$. Temos:

$$\frac{S}{2} = \sum \frac{(-1)^{n+1}}{2n} = \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{6} - \frac{1}{8} + \cdots$$
$$= \qquad = 0 + \frac{1}{2} + 0 - \frac{1}{4} + 0 + \frac{1}{6} + 0 - \frac{1}{8} + \cdots \qquad (\boldsymbol{II})$$

Somando $(\boldsymbol{I})$ e $(\boldsymbol{II})$, obtemos:

$$\frac{3S}{2} = 1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} - \frac{1}{4} + \cdots \qquad (\boldsymbol{III})$$

Note que a série $(\boldsymbol{III})$ é uma reordenação de $(\boldsymbol{I})$, e $\frac{3S}{2} \neq S$, o que mostra que ao reordenarmos uma série, podemos obter um novo valor. Até onde esse resultado pode ser levado?

2. METODOLOGIA

Esse trabalho foi oriundo de um curso de Análise Real, e um curso de Métodos Numéricos, no período 2016.1 da Universidade Federal de Campina Grande, e de uma pesquisa bibliográfica.

3. RESULTADOS E DISCUSSÃO

Mostraremos o seguinte teorema, devido a Riemann:

TEOREMA: Seja $\sum a_n$ uma série condicionalmente convergente, isto é, $\sum a_n$ converge, mas não absolutamente. Dado um número real c, existe uma reordenação (b_n) dos termos de $\sum a_n$ tal que $\sum b_n = c$.

DEMONSTRAÇÃO:

Para tal demonstração, definimos o conceito de parte positiva e parte negativa de uma sequência. Dada (a_n), definimos as sequências:

$$p_n = \max\{0, a_n\}$$

$$q_n = \max\{0, -a_n\}.$$

Note que, caso $\sum a_n$ seja convergente, temos

$$\lim p_n = \lim q_n = \lim a_n = 0.$$

E ainda:

$a_n = p_n - q_n$

$|a_n| = p_n + q_n$

Segue das igualdades acima a afirmação que será usada posteriormente:

Afirmação: Se $\sum a_n$ é condicionalmente convergente, então $\sum p_n = \sum q_n = +\infty$.

Voltemos à demonstração do teorema principal. Fixado $c \in \mathbb{R}$, chamemos de (t_n) a sequência da somas parciais da nova série, formada reordenando $\sum a_n$, tomando como primeiros termos $p_1, p_2, \dots, p_{n_1}$, de forma que n_1 seja o menor índice para o qual $\sum_{n=1}^{n_1} p_n > c$, ou seja:

$$p_1 + p_2 + \cdots + p_{n_1 - 1} \leq c < \ p_1 + p_2 + \cdots + p_{n_1-1} + p_{n_1} = t_{n_1} \quad (I).$$

Tal escolha é possível pela **afirmação**. Em seguida, tomemos os termos negativos $-q_1, \ -q_2, \ \dots, \ -q_{n_2}$ onde n_2 é o primeiro índice para o qual a soma parcial da reordenação fica menor que o c fixado. Matematicamente, isso significa:

$$t_{n_2} = p_1 + p_2 + \cdots + p_{n_1} - q_1 - q_2 - \cdots - q_{n_2} < c \qquad (II)$$

Mas

$$c \leq p_1 + p_2 + \cdots + p_{n_1} - q_1 - q_2 - \cdots - q_{n_2 - 1} \qquad (III)$$

Continuamos esse processo indefinidamente. Obtemos assim uma reordenação de $\sum x_n$ tal que as reduzidas da nova série tendem para c. Com efeito, para todo i ímpar, temos de maneira análoga a (I) que

$$0 < t_{n_i} - c \leq p_{n_i}.$$

E analogamente à (II) e (III), segue que

$$0 < c - t_{n_{i+1}} < q_{n_{i+1}}.$$

Mas como

$$\lim p_n = \lim q_n = \lim x_n = 0$$

Concluímos que $\lim_{i \to \infty} t_{n_i} = c$. Ainda, pela maneira como foi construída a sequência (t_n), temos os seguintes casos:

$$i \text{ ímpar}, \ n_i \leq n < n_{i+1} \Rightarrow t_{n_{i+i}} \leq t_n \leq t_{n_i},$$

$$i \text{ par}, \ n_i \leq n < n_{i+1} \Rightarrow t_{n_i} \leq t_n \leq t_{n_{i+1}}.$$

Assim, temos $\lim_{n \to \infty} t_n = c$, o que mostra o resultado.

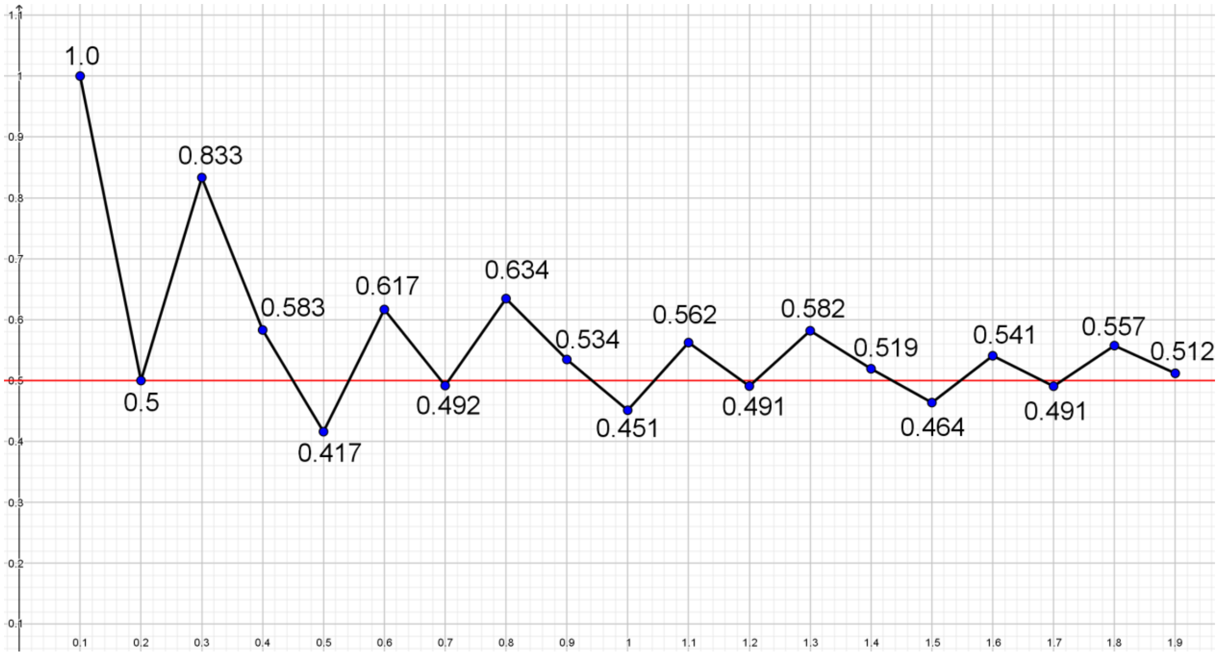

Figura 1. Aqui, usamos o algoritmo da demonstração para fazer a reordenação de $\sum \frac{(-1)^{n+1}}{n}$ *que converge para 0.5. Figura construída no Geogebra.*

4. CONSIDERAÇÕES FINAIS

Gostaríamos primeiramente de observar que a demonstração do teorema principal pode ser generalizada escolhendo um *lim sup* e um *lim inf,* ao invés de simplesmente escolher um limite. Observamos também que a demonstração é construtiva, e o algoritmo usado pra construção da reordenação é facilmente programável. Deixamos assim o desafio de construir tal programa, na linguagem que o leitor achar mais adequada. O autor 1 o fez em SCILAB.

Acreditamos que o teorema ajuda a entender a estranheza do infinito, sendo mais um exemplo em que uma hipótese de infinitude faz com que a situação fuja do intuitivo. Tal teorema pode ser, portanto, um exemplo instigante para alunos de graduação em um curso de análise, ou até num curso de cálculo.

REFERÊNCIAS

As referências bibliográficas devem ser citadas, em ordem alfabética, de acordo com as normas da ABNT.

1. DO CARMO, M. P.. *Differential Geometry of Curves and Surfaces*. Prentice-Hall, Inc. Englewood Cliffs, New Jersey, 1976.

AGRADECIMENTOS

Agradecemos ao grupo PET, pelo apoio diário, ao nosso tutor Daniel Cordeiro de Morais Filho pela orientação, ao professor Marcelo Carvalho Ferreira pelo profícuo curso de Análise Real no qual esse problema foi apresentado, ao professor Luiz Antônio da Silva Medeiros por, pacientemente, ter ensinado o autor 1 a programar, e aos demais professores e funcionários da UAMat por sempre estarem dispostos a ajudar. Finalmente, agradecemos ao FNDE pelo financiamento desse trabalho.